*C'est avec profonde gratitude est sincères mots,*
*que nous dédions ce modeste travail de fin d'étude à*
***nos chers parents** ;qui sacrifié leur vie pour*
*notre réussite et nous ont éclairé le chemin par*
*leurs conseils judicieux.*
*Nous espérons qu'un jour,*
*nous pourrons leurs rendre un peu de qu'ils ont*
*fait pour nous, que dieu leur prête bonheur et longue vie.*
*Nous dédions aussi ce travail à **nos fréres** et **soeurs**, **nos familles** , **nos amis**,*
*tous **nous professeurs** qui nous ont enseigner*
*et à tous ceux qui nous **sont chers**.*

# Remerciements

**A**vant tous, nous tenons à remercier de tout cœur notre dieu "**ALLAH**" le tout-puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

**N**ous remercions notre honorable **encadreur** pour tous ces efforts et directives durant la période de réalisation du travail.
**N**ous remercions également Monsieur **le président**, de nous avoir fait l'honneur de présider ce jury.
**D**e méme, Nous remercions Monsieur **l'examinateur**,d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

**N**os remerciements vont également à tous les enseignants de l'Universite de Tebessa ,de **F**aculté des **S**ciences **E**xactes et **S**ciences de la **N**ature et de la **V**ie et de **D**épartement des **M**athématiques et **I**nformatiques.

**N**ous remercions également tout ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

**E**nfin, à tous nos collégues et amis, nous adressons un grand merci.

TAREK & OKBA

# Résumé

**L**e but de cette étude est de traiter le problème de Cauchy de type de réaction diffusion avec un terme de réaction non linéaire

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |u|^{p_1} |v|^{q_1} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^{p_2} |v|^{q_2} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

tels que : $N \geq 1, p_1, q_2, p_2$ et $q_1$ des constantes , $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_i}$ : la dérivée d'ordre $0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2.$ au sens de **Caputo** et $(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}$ : **Laplacian** d'ordre fractionnaire où $1 \leq \beta_i \leq 2, i = 1, 2.$

**Premièrement,** nous étudions la non éxistence des solutions globales faibles non triviales .

**Après ça,** nous donnons quelques Conditions nécessaires d'éxistence locale et globale de solutions faibles.

**Mots clés :** dérivées fractionnaires , non-existence globale , réaction diffusion , existence globale , existence locale.

# Abstract

**T**he purpose of this study is to study the following Cauchy problem for a parabolic fractional reaction-diffusion system with nonlinear terms

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |u|^{p_1} |v|^{q_1} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^{p_2} |v|^{q_2} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

where $N \geq 1, p_1, q_2,\ p_2$ and $q_1$ are constants.$\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_i}$ : denotes the derivatives of order $0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2.$ in the sense of **Caputo** and $(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}$ : is the fractional power of the **Laplacian** where $1 \leq \beta_i \leq 2, i = 1, 2.$

**First**, we study a nonexistence of the nontrivial global weak nonnegative solutions.

**After that,** we give some necessary conditions for local and global existence of a weak solution.

**Keyworks :** Fractional derivatives, nonlinear reaction diffusion system, global existence, local existence.

# Introduction générale

**D**es études récentes montrent le rôle joué par les dérivées fractionnaires dans la modélisation mathématique de diverses situations scientifiques notamment dans la mécanique, la physique, la chimie, la biologie et les finances,...etc.

**L**e calcul fractionnaire est un domaine de mathématiques aussi ancien que le calcul différentiel, le concept naît d'une question posée par l'**Hospital** en 1695 à **Leibniz** sur le sens de $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n$ si $n = \frac{1}{2}$ et ce qui arrive pour $D^n$ si $n$ n'est pas un nombre entier ; **Leibniz** a répondu : «C'est un paradoxe dont un jour des conséquences utiles seront tirées». Au cours des dernières années, des dérivés non- intègres et des intégrales ont été utilisées dans différents domaines de la science pour décrire de nombreux phénomènes et jouent aujourd'hui un rôle important dans la modélisation des problèmes d'ingénierie, y compris le flux de fluide, la rhéologie, le transport diffusif, les réseaux, la probabilité et les propriétés héréditaires de divers matériaux.

**L**es problèmes aux limite pour les équations différentielles fractionnaires non linéaires ont reçu beaucoup d'attention et il devient naturel que de nombreux auteurs tentent de calculer les dérivés fractionnaires, les intégrales fractionnaires et de résoudre les équations différentielles fractionnaires.

**L**'objectif principal de ce mémoire est l'étude de certains systèmes d'équations fractionnaires de type réaction-diffusion avec termes de réaction non-linéaires de la forme $|u|^{p_i} |v|^{q_i}, i = 1, 2.$

**N**otre mémoire est est organisé comme suit :

**D**ans **le premier chapitre ,**nous donnons quelques outils de base trés importants pour la suite de ce travail, nous commencons par des définitions, des théorèmes et des inégalités, ensuite nous donnons l'intégration et dérivation fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville,** de **Caputo**

**Le deuxième chapitre,** est consacré à l'étude de la non-existence de solution globale d'un problème de type réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |u|^{p_1} |v|^{q_1} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^{p_2} |v|^{q_2} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1}$$

tels que $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_i}$ : la dérivée d'ordre $0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2.$ au sens de **Caputo** et $(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}$ : **Laplacian** d'ordre fractionnaire où $1 \leq \beta_i \leq 2, i = 1, 2.$ définie par :

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}} u(x,t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ |\xi|^{\beta_i} \mathcal{F}(u)(\xi) \right\} (x,t),$$

où $\mathcal{F}$ : la transformation de **Fourier** et $\mathcal{F}^{-1}$son inverse.
Et nous montrons que si

$$p_1 \geq 0, q_2 \geq 0, p_2 > 1, q_1 > 1, 0 < \alpha_i < 1 et 1 \leq \beta_i \leq 2,$$

et

$$N \leq N^* = \max \left\{ \frac{\frac{\alpha_2}{p_2} + \alpha_1 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 p_2 q_1'} + \frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2'}}, \frac{\frac{\alpha_1}{p_1} + \alpha_2 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2' q_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 q_1'}} \right\}.$$

Alors le problème (1) n'admet aucune solution globale faible.
Où

$$p_1 > 1, q_2 > 1, p_2 \geq 0, q_1 \geq 0, 0 < \alpha_i < 1 et 1 \leq \beta_i \leq 2,$$

et

$$1 \leq N \leq \max \left\{ \beta_1 p_1' - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \beta_2 q_2' - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right\}.$$

Alors le problème (1) n'admet aucune solution positif .

**F**inalement,Dans **le troisième chapitre,** nous présentons des conditions nécessaires pour l'existence locale et globale des solutions pour le méme problème (1) dans le cas $p_1 > 1, q_2 > 1, p_2 \geq 0, q_1 \geq 0, 0 < \alpha_i < 1$ et $1 \leq \beta_i \leq 2$, et on va prouver que si $(u, v)$ une solution faible locale $(T < +\infty)$ du problème (1). Alors,

$$\lim_{|x| \to \infty} \inf u_0(x) \leq C_1 T^{-\frac{\alpha_1}{P_1 - 1}},$$

et

$$\lim_{|x| \to \infty} \inf v_0(x) \leq C_2 T^{-\frac{\alpha_2}{q_2 - 1}}.$$

Et si $(u, v)$ solution faible non-négative globale et non-triviale. Alors il existe deux constantes $C_3$ et $C_4$ telles que

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) |x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_3,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x) |x|^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}} \leq C_4.$$

**N**ous terminons ce travail par une conclusion où nous mentionnons quelques problèmes ouverts.